Exercice 3 :

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.