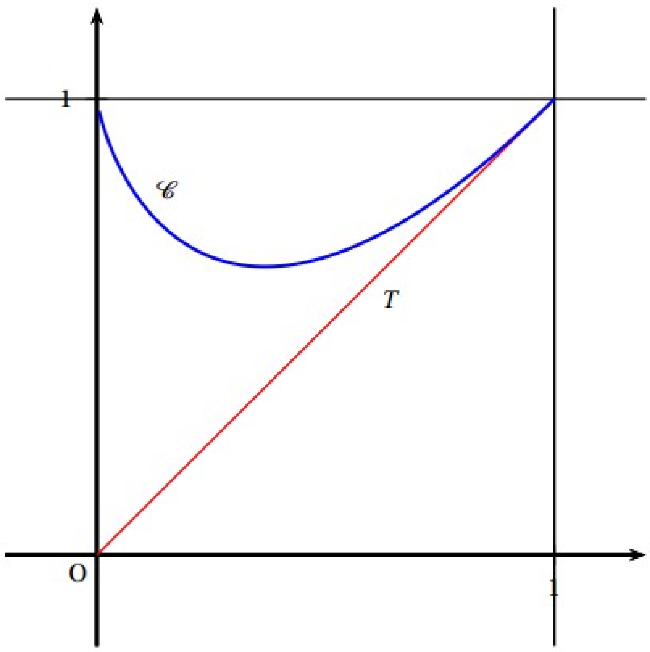
Exercice 2 :

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
T est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. **a.** Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

   b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0\,;\,1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0\,;\,1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0\,;\,1]$.

   b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

   a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et dresser le tableau de variation de g.
   On ne cherchera pas la limite de g en 0.

   b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.